AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Mechanika i wytrzymałość materiałów

IB - Wykład Nr 2

Statyka: środkowy oraz płaski dowolny układ sił

aksjomaty statyki, środkowy układ sił – redukcja i warunek równowagi, twierdzenie o trzech siłach, moment siły, para sił, płaski układ sił – redukcja i warunek równowagi

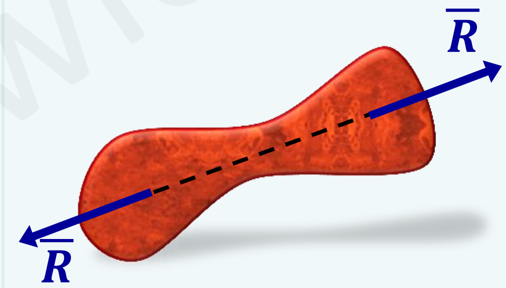
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz

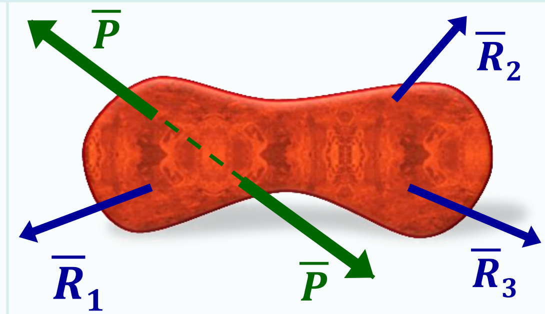
2.1. Aksjomaty statyki

Aksjomaty – postulaty, których się nie dowodzi, przyjmowane jako pewnik.

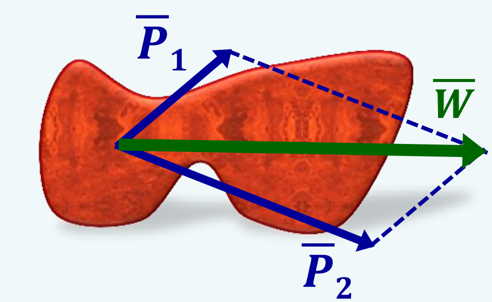
1) Dwie siły równoważą się wzajemnie jeśli mają jednakowe wartości (moduły), działają wzdłuż jednego kierunku i mają przeciwne zwroty.



2) Działanie układu sił działających na ciało nie ulegnie zmianie, jeżeli dodamy do niego lub odejmiemy od niego układ sił równoważny zeru.

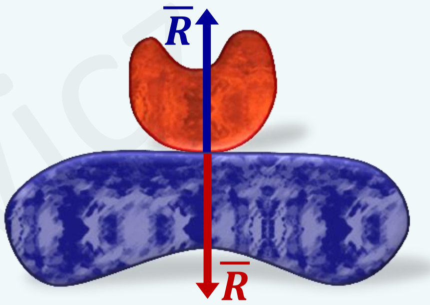


3) Wypadkowa dwóch sił przechodzi przez punkt ich przecięcia i wyraża się długością przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych siłach (jest wektorową sumą sił składowych).

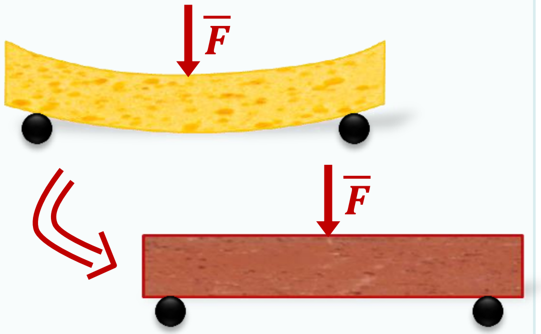


2.1. Aksjomaty statyki

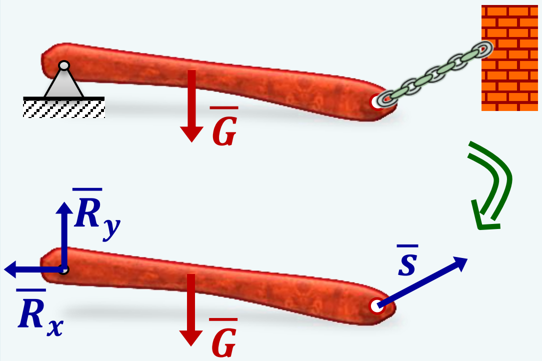
4) Wszelkiemu działaniu siły odpowiada równe i przeciwne skierowane przeciwdziałanie.



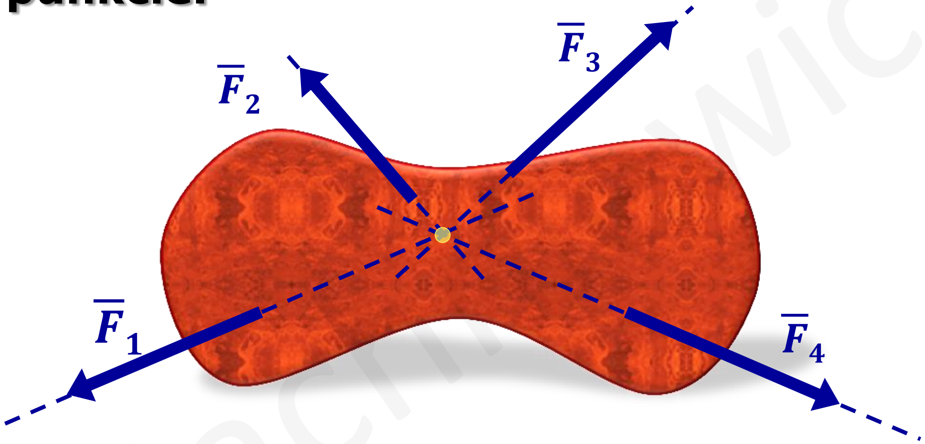
5) Równowaga ciała odkształcalnego nie zostanie naruszana jeżeli ciało to stanie się ciałem sztywnym.



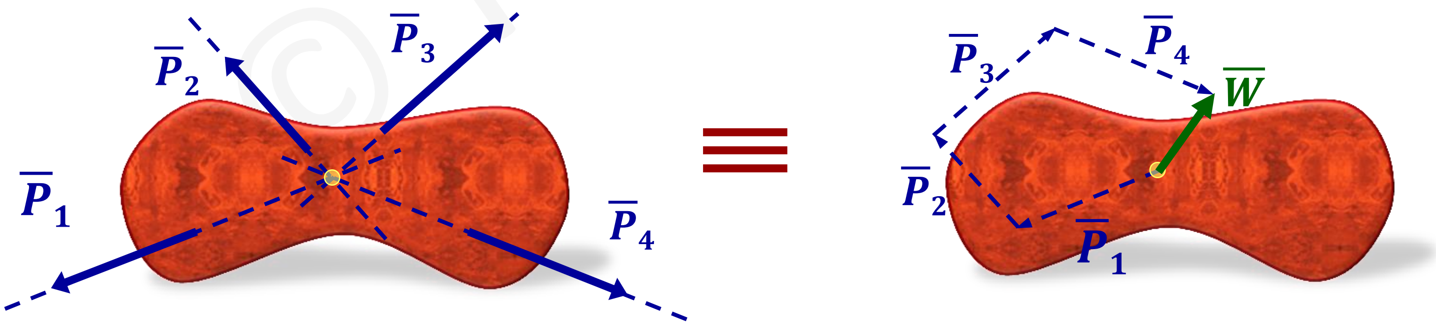
6) Ciało nieswobodne możemy traktować jak ciało swobodne jeżeli myślowo uwolnili się je od więzów, zastępując ich działanie odpowiednimi reakcjami.



Środkowy układ sił (zbieżny układ sił) **– układ sił których linie działania przecinają się w jednym punkcie.**

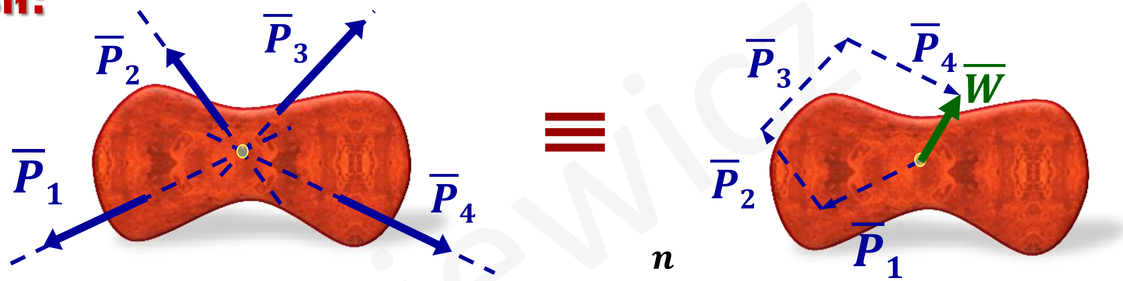


Redukcja środkowego układu sił: środkowy układ sił można zastąpić działaniem jednej siły wypadkowej – **wektora głównego** – będącego sumą wszystkich sił działających na ciało, przyczepionego w punkcie przecięcia ich kierunków działania.



$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$$

Redukcja środkowego układu sił:



$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$$

Warunki równowagi środkowego układu sił:

a) w zapisie wektorowym:

$$\overline{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = 0}$$

Zbieżny układ sił jest w równowadze, gdy wielobok sił działających na ciało jest wielobokiem zamkniętym (wektor główny jest równy zero)

b) w ujęciu analitycznym:

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = 0 \quad \Rightarrow$$

Warunki równowagi <u>płaskiego środkowego układu sił</u>

$$W_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$$

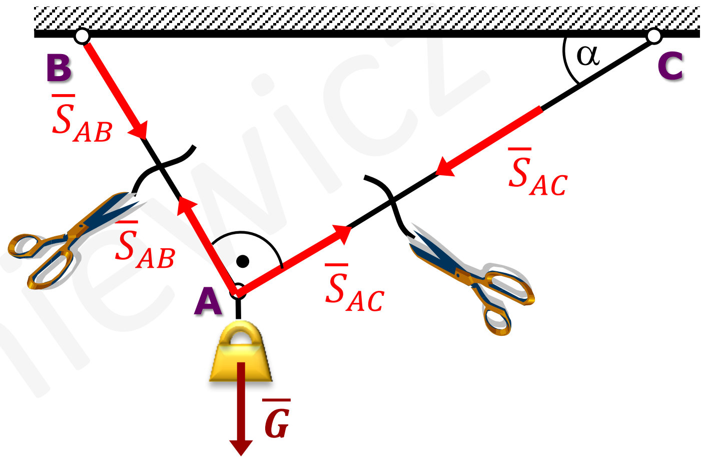
$$W_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$$

$$W_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$$

Warunki równowagi <u>przestrzennego środkowego układu sił</u>

Przykład 2.1:

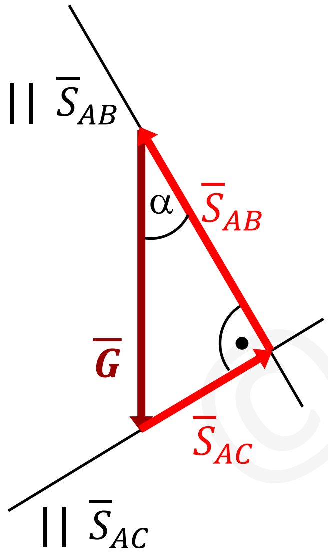
Obliczyć naciągi w linkach AB i AC, jeżeli w punkcie A podwieszono ciężar G.



Dane:
$G = 400$ N
$\alpha = 30^o$

Szukane:
S_{AB}, S_{AC}

Metoda grafo-analityczna:

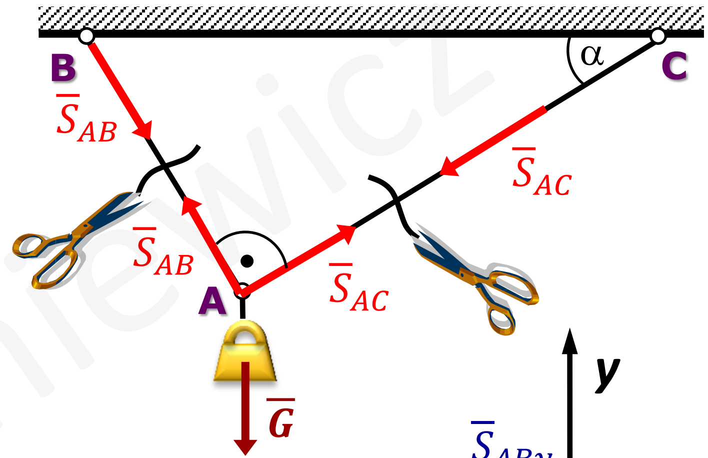


$$S_{AB} = G \cdot \cos\alpha = 400 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \mathbf{200\sqrt{2}\ N}$$

$$S_{AC} = G \cdot \sin\alpha = 400 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \mathbf{200\ N}$$

Przykład 2.1:

Obliczyć naciągi w linkach AB i AC, jeżeli w punkcie A podwieszono ciężar G.

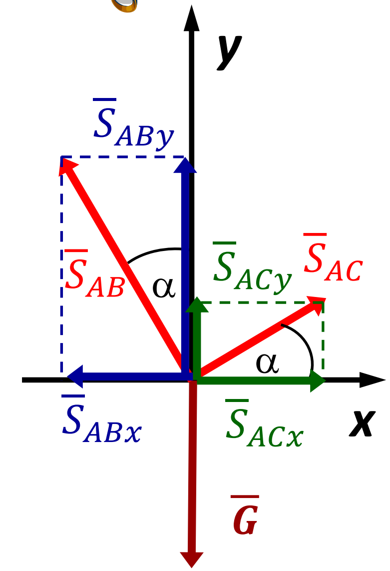


Dane:
G = 400 N
α = 30°

Szukane:
S_{AB}, S_{AC}

Metoda analityczna:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0 & \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{ACx}} - \boldsymbol{S_{ABx}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0 & \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{ABy}} + \boldsymbol{S_{ACy}} - \boldsymbol{G} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} S_{AC} \cdot \cos\alpha - S_{AB} \cdot \sin\alpha = 0 \\ S_{AB} \cdot \cos\alpha + S_{AC} \cdot \sin\alpha - G = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad S_{AC} = S_{AB} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = S_{AB} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$S_{AB} \cdot \cos\alpha + S_{AB} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \sin\alpha - G = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = \frac{G}{\cos\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{G \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = G \cdot \cos\alpha$$

$$\boldsymbol{S_{AB} = 200\sqrt{3}\ \ \mathrm{N}}$$

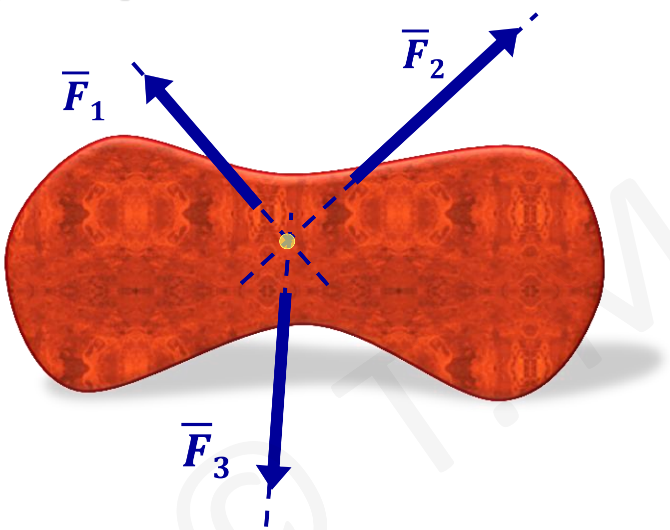
$$S_{AC} = S_{AB} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = S_{AB} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \boldsymbol{200\ \mathrm{N}}$$

2.3. Środkowy układ sił – twierdzenie o trzech siłach

Twierdzenie o trzech siłach:

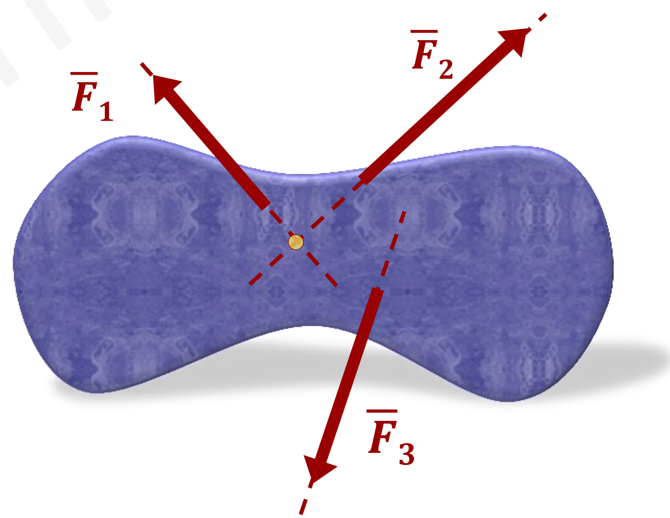
Układ trzech sił jest w równowadze jeżeli kierunki działania tych sił przecinają się w jednym punkcie (siły tworzą układ zbieżny) oraz wielobok utworzony z tych sił jest wielobokiem zamkniętym.

Przykłady:



Układ sił równoważących się pod warunkiem:

$$\overline{W} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0$$

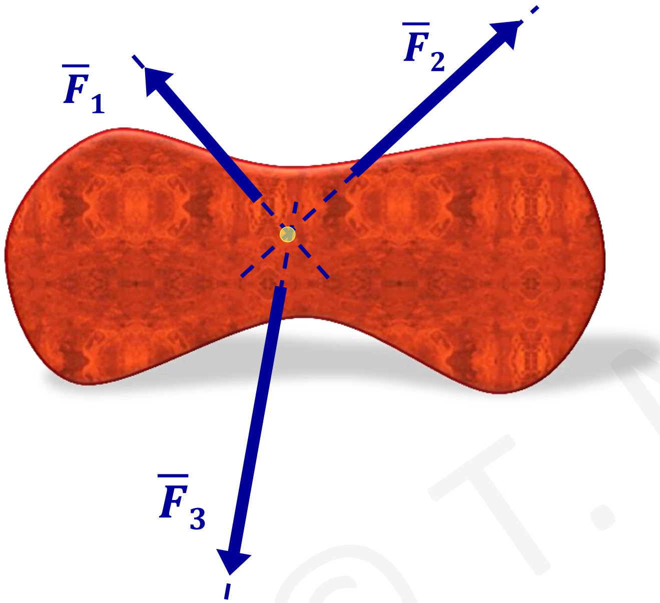


Układ sił nie mogący się równoważyć, nawet jeśli:

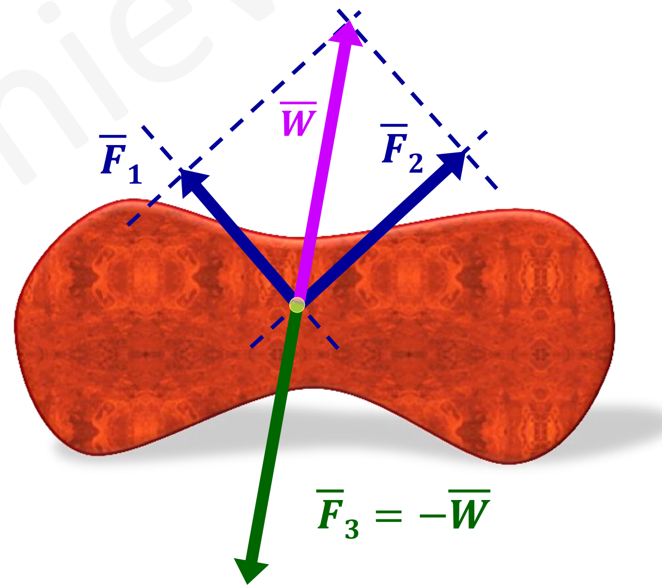
$$\overline{W} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0$$

Twierdzenie o trzech siłach:

Układ trzech sił jest w równowadze jeżeli kierunki działania tych sił przecinają się w jednym punkcie (siły tworzą układ zbieżny) oraz wielobok utworzony z tych sił jest wielobokiem zamkniętym.



Dowód:



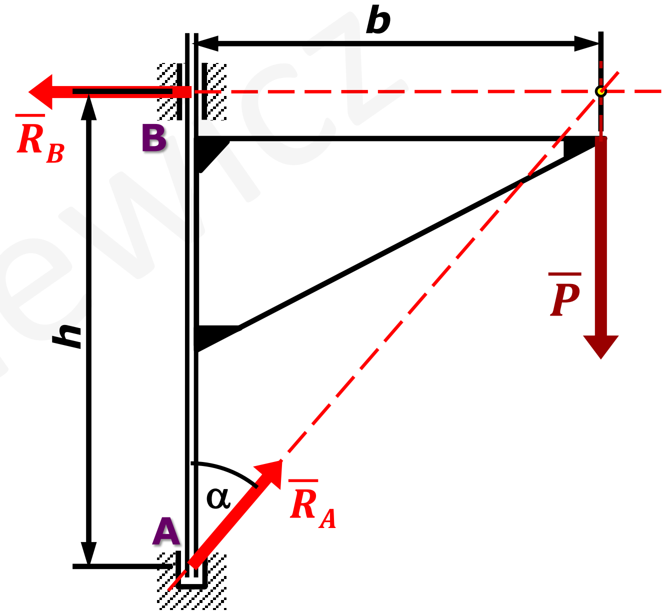
Aksjomat 3: Wypadkowa dwóch sił przechodzi przez punkt ich przecięcia i wyraża się długością przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych siłach.

Aksjomat 1: Dwie siły równoważą się wzajemnie jeśli mają jednakowe wartości (moduły), działają wzdłuż jednego kierunku i mają przeciwne zwroty.

2.3. Środkowy układ sił – twierdzenie o trzech siłach

Przykład 2.2:

Obliczyć reakcje w łożyskach A i B konstrukcji jak na rysunku.



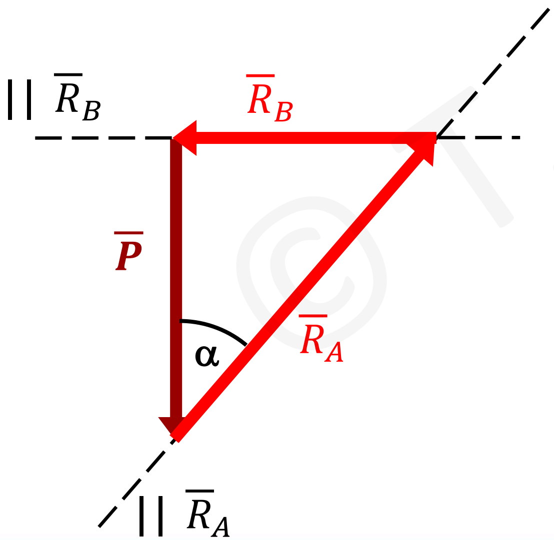
Dane:
P = 13 kN
b = 75 cm
h = 130 cm
α = 30°

Szukane:
R_A, R_B

Z twierdzenia o trzech siłach:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{h}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{75}{130}\right) \approx 30°$$

Metoda grafo-analityczna:

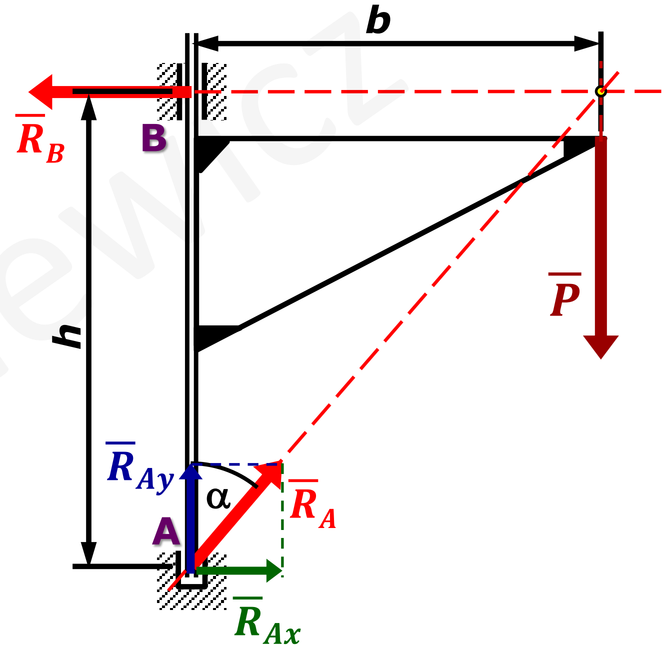


$$R_A = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{P}{\cos 30°} = \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{26\sqrt{3}}{3} \approx \mathbf{15\ kN}$$

$$R_B = R_A \cdot \sin\alpha = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}5 \approx \mathbf{7{,}5\ \ kN}$$

Przykład 2.2:

Obliczyć reakcje w łożyskach A i B konstrukcji jak na rysunku.



Dane:
P = 13 kN
b = 75 cm
h = 130 cm
α = 30°

Szukane:
R_A, R_B

Z twierdzenia o trzech siłach:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{h}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{75}{130}\right) \approx 30^\circ$$

Metoda analityczna:

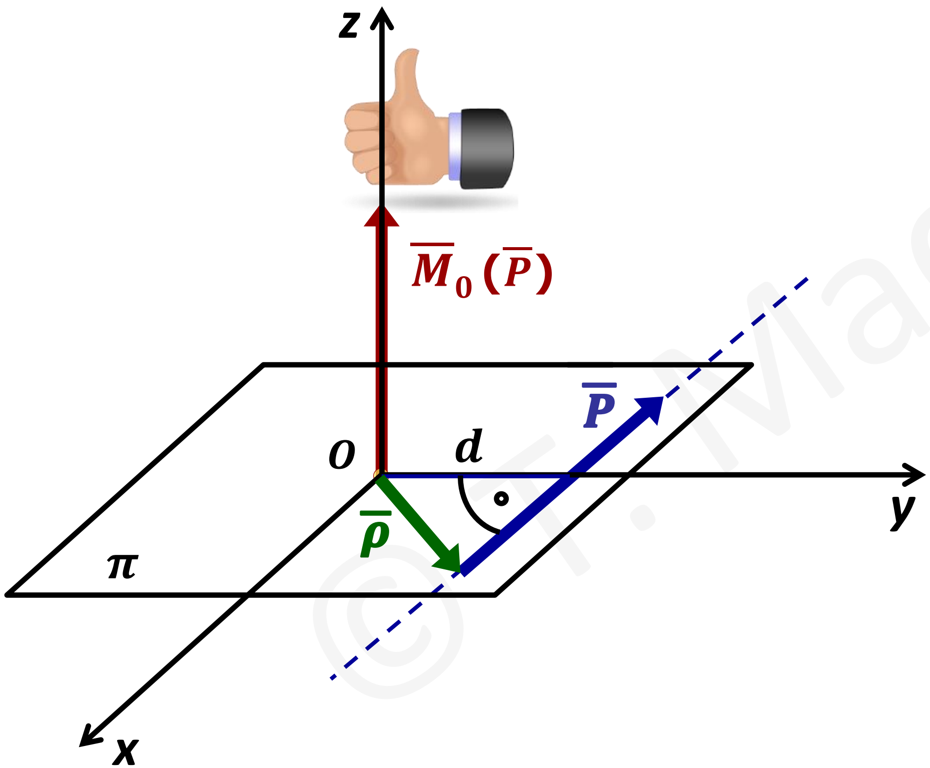
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0 & \Rightarrow \quad -R_B + R_{Ax} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0 & \Rightarrow \quad -P + R_{Ay} = 0 \quad \Rightarrow \quad -P + R_A \cdot \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R_A = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{13}{\cos\alpha} = \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{26\sqrt{3}}{3} \approx 15 \text{ kN}$$

$$-R_B + R_{Ax} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = R_A \cdot \sin\alpha = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}5 \approx 7{,}5 \text{ kN}$$

Definicja:

Moment siły $\overline{P}$ względem bieguna *O* jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego $\overline{\rho}$, o początku w punkcie *O* i końcu w punkcie przyłożenia siły, oraz siły $\overline{P}$:



$$\overline{M}_0(\overline{P}) = \overline{\rho} \times \overline{P}$$

1) Wartość (moduł) wektora momentu:

$$M_0(\overline{P}) = \rho \cdot P \cdot sin < (\overline{\rho}, \overline{P}) = P \cdot d$$

2) Kierunek wektora momentu:

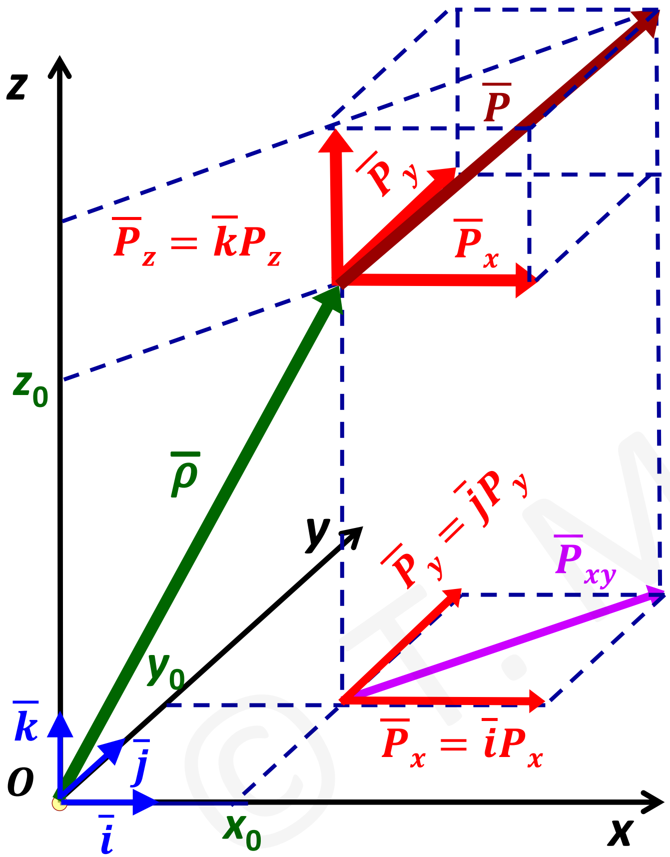
Prostopadły do płaszczyzny $\overline{P} - \overline{\rho}$

3) Zwrot wektora momentu:

Zgodny z *„regułą prawej dłoni"*

2.4. Momenty siły względem osi

Współrzędne wektora momentu $\overline{M}_0(M_x, My, Mz)$ oblicza się jako minory wyznacznika:



$$\overline{M}_O(\overline{P}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_o & y_o & z_o \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$$\overline{M}_O = \overline{i}(P_z y_O - P_y z_O) + \overline{j}(P_x z_O - P_z x_O) + \overline{k}(P_y x_O - P_x y_O)$$
$$= \overline{i}M_x + \overline{j}M_y + \overline{k}M_z$$

gdzie:

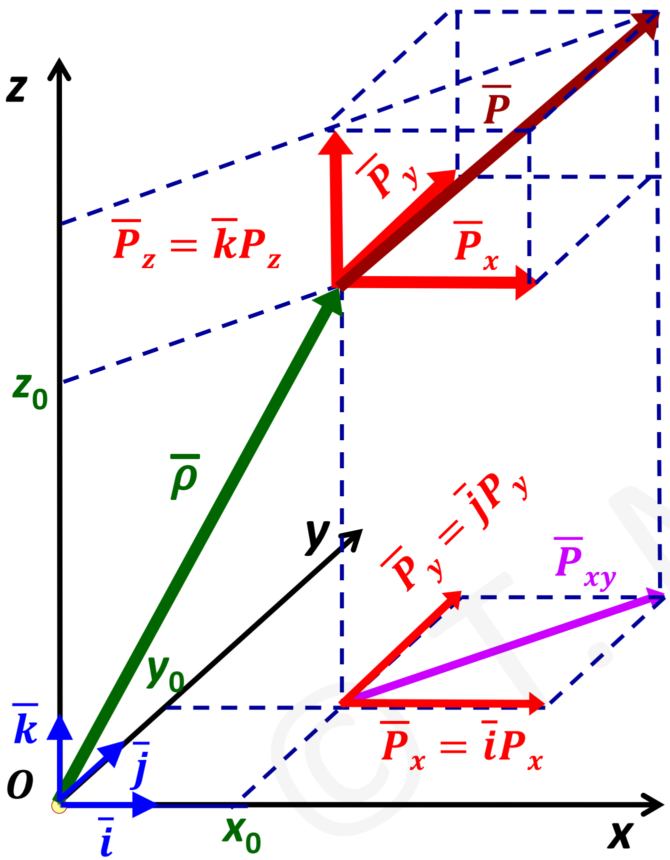
$\overline{\rho}(x_O, y_O, z_O)$ $\overline{P}(P_x, P_y, P_z)$ $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ - wersory

$$\left.\begin{aligned} M_x &= P_z y_O - P_y z_O \\ M_y &= P_x z_O - P_z x_O \\ M_z &= P_y x_O - P_x y_O \end{aligned}\right\}$$

Momenty siły $\overline{P}$ względem osi x, y, z

$$M_o(\overline{P}) = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

Moment siły względem osi jest to moment rzutu tej siły na płaszczyznę prostopadłą do osi liczony względem punktu przebicia tej osi z płaszczyzną



Szczególne przypadki:

1) Siła działa w jednej płaszczyźnie ⇨ moment siły ma jedynie składową prostopadłą do tej płaszczyzny, np.:
P_z=0, z_O=0 ⇨ M_x=0, M_y=0 ⇨

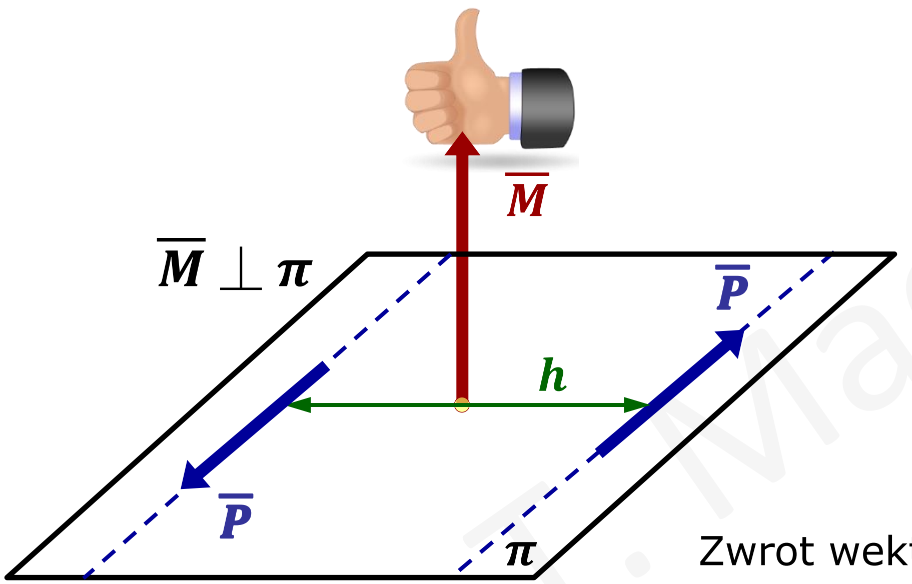
$$\Rightarrow \boldsymbol{M_O}(\overline{\boldsymbol{P}}) = \boldsymbol{Mz} = \boldsymbol{PyxO} - \boldsymbol{PxyO},$$

2) Prosta działania siły przechodzi przez biegun O ⇨
⇨ ρ=0 ⇨ $\boldsymbol{M_O}$**=0**,

3) Siła równoległa do danej osi daje zerowy moment względem tej osi, np.:
$P = P_z, P_x = 0, P_y = 0 \Rightarrow M_z = 0$

2.5. Para sił - definicja

Parą sił nazywamy układ dwóch sił równoległych, nie leżących na jednej prostej, o równych modułach i przeciwnych zwrotach.



Suma momentów sił składowych pary sił, względem dowolnego punktu jej płaszczyzny, ma wartość stałą niezależną od położenia punktu i równa się iloczynowi wartości sił pary i odległości między liniami działania tych sił:

$M = P \cdot h$ – **moment pary sił**

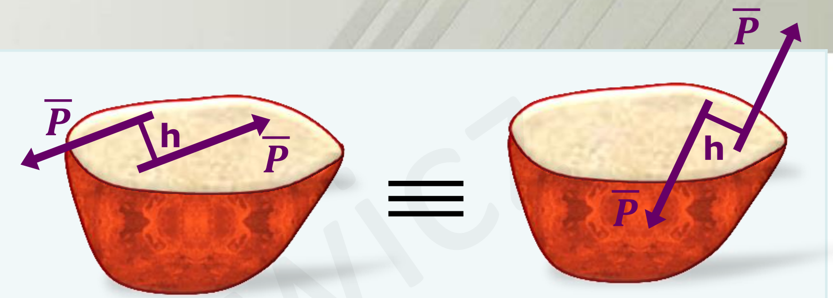
h – **ramię pary sił**

Zwrot wektora momentu pary sił jest zgodny z regułą prawej dłoni.

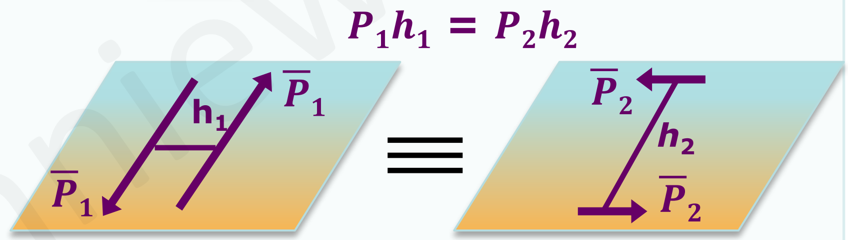
Para sił, pojedyncza siła i moment siły są to elementarne układy statyki, tzn. nie da się ich przedstawić w prostszej postaci

2.5. Para sił - własności

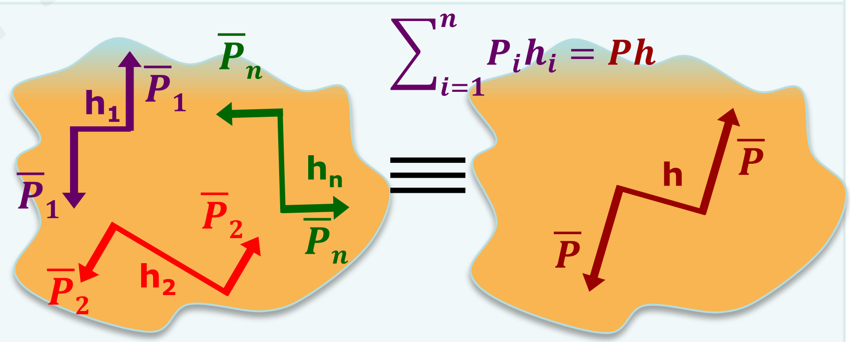
1) Działanie pary sił na ciało sztywne nie zmieni się, jeżeli przeniesiemy ją w dowolne położenia w płaszczyźnie jej działania.



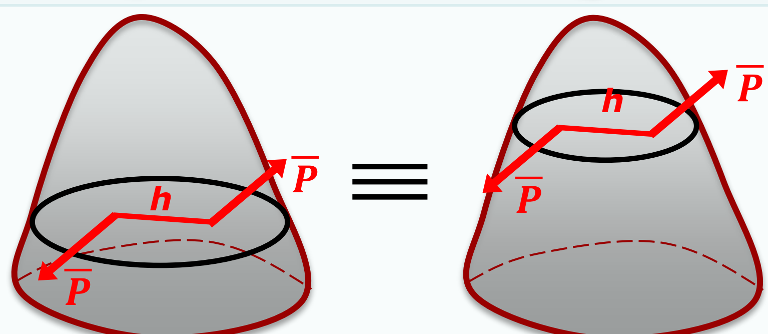
2) Dwie pary sił o tym samym momencie, leżące w tej samej płaszczyźnie są sobie równoważne



3) Jeżeli w płaszczyźnie działa kilka par sił, to można je zastąpić działaniem jednaj p momencie równym algebraicznej sumie momentów par sił składowych.

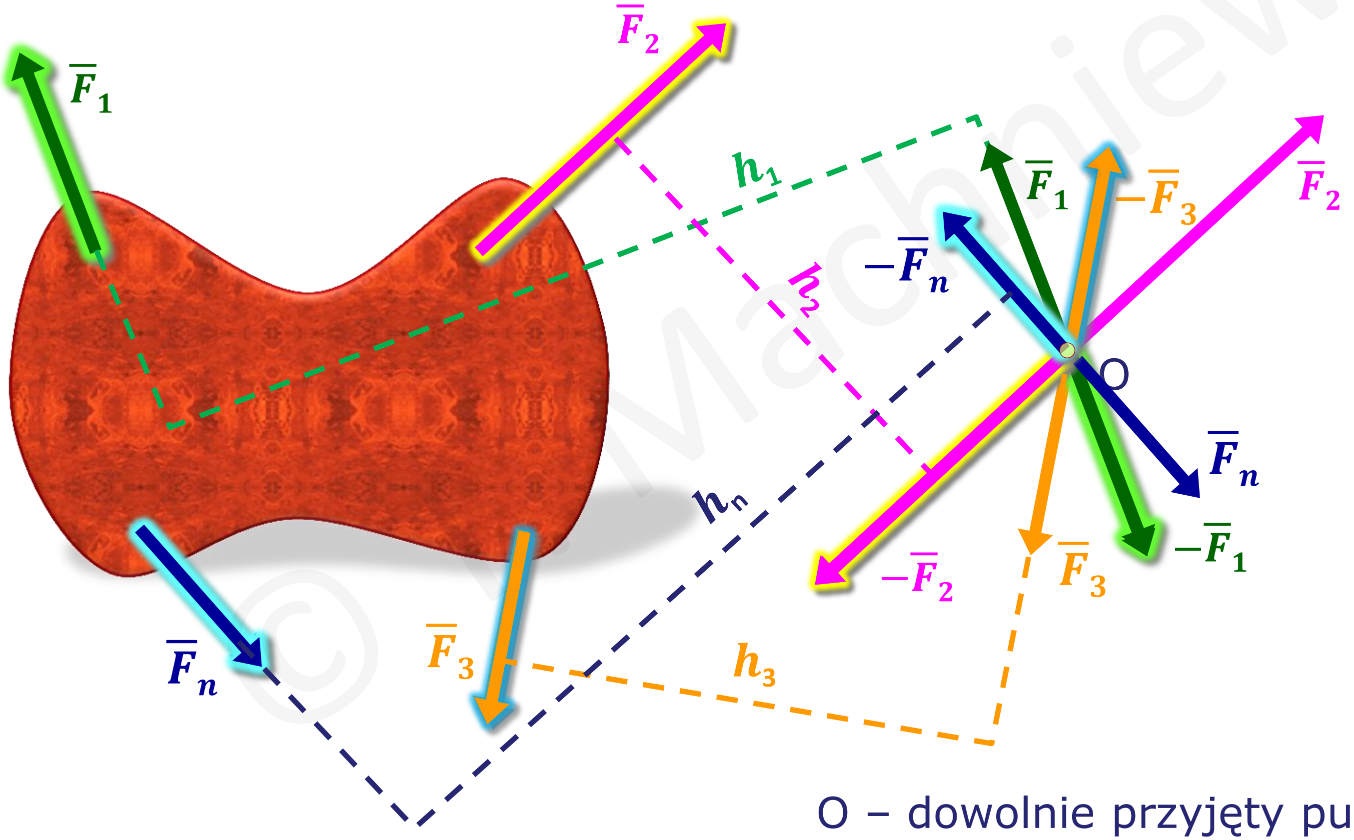


4) Działanie pary sił na ciało sztywne nie ulegnie zmianie, jeżeli parę sił przeniesiemy do płaszczyzny równoległej.



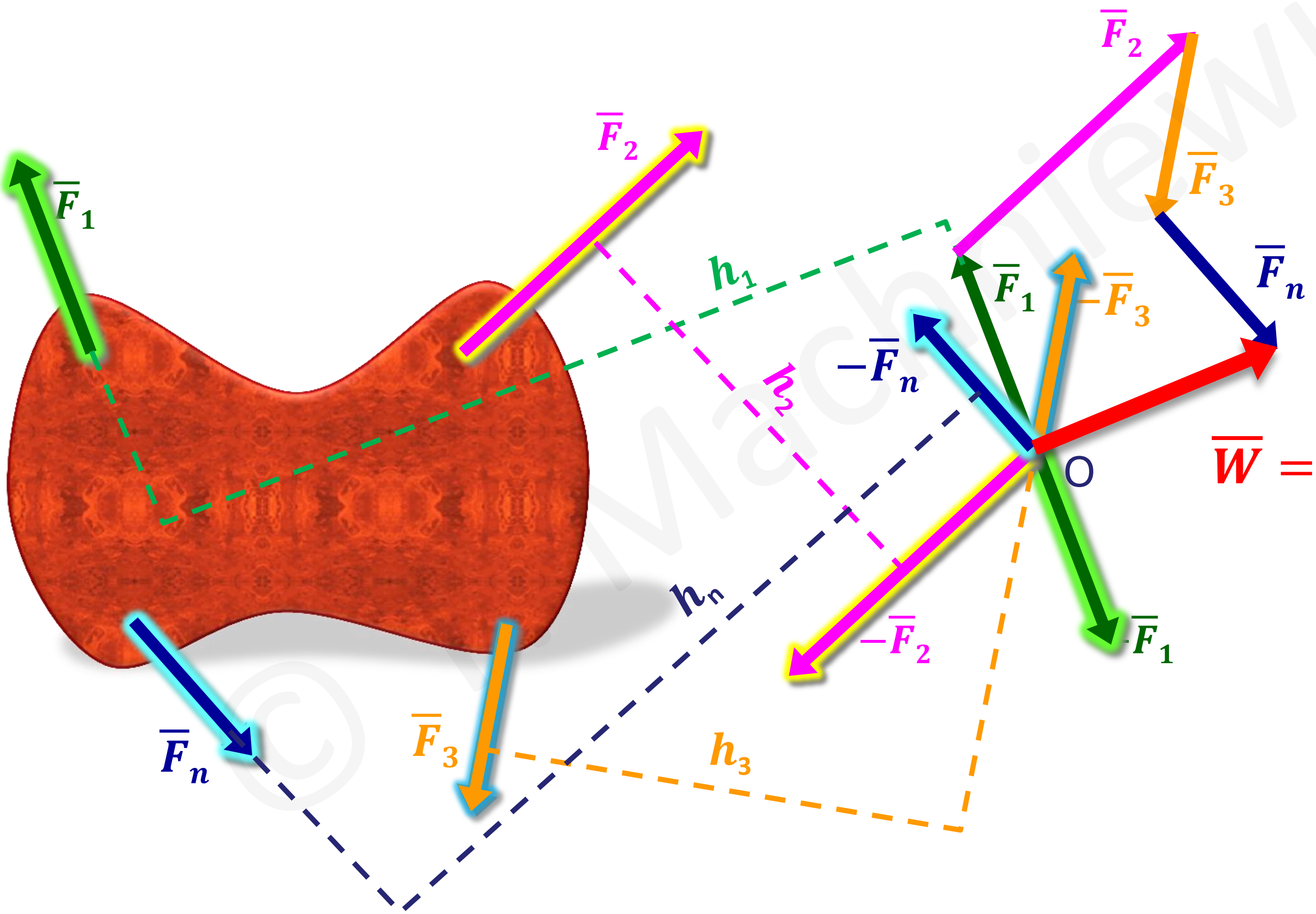
Płaski dowolny układ sił – układ sił działających w jednej płaszczyźnie

Redukcja płaskiego dowolnego układu sił:



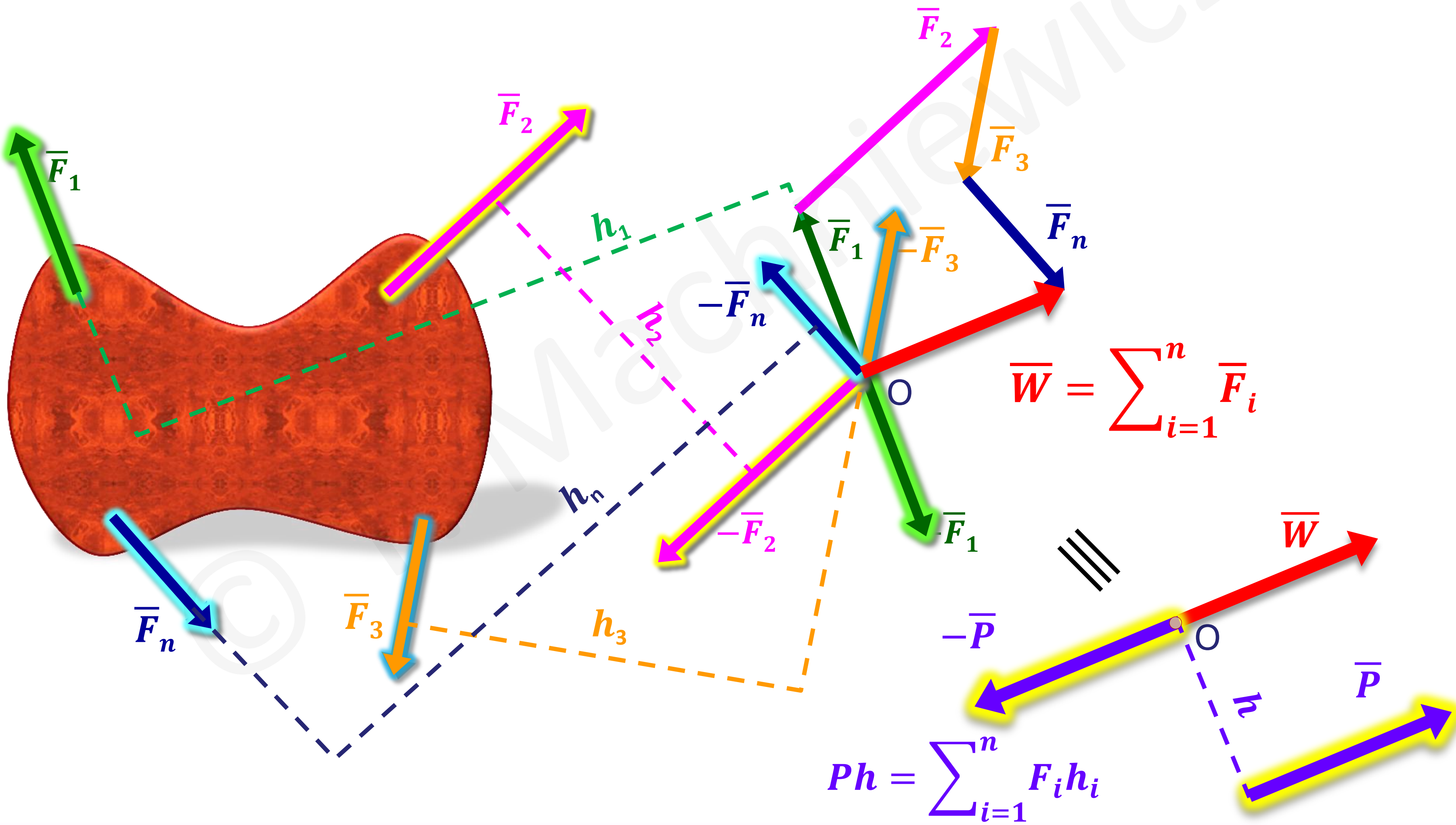
O – dowolnie przyjęty punkt na płaszczyźnie, tzw. **biegun redukcji**

Redukcja płaskiego dowolnego układu sił:



$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

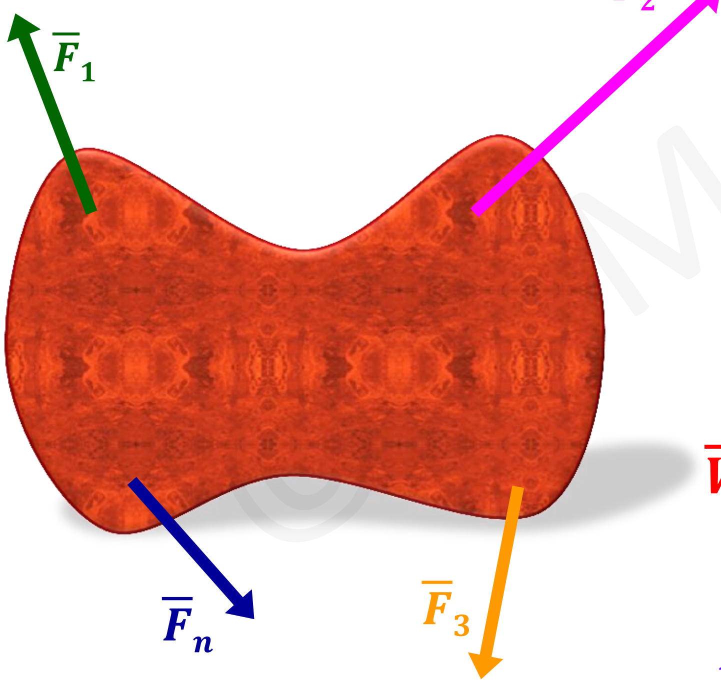
Redukcja płaskiego dowolnego układu sił:

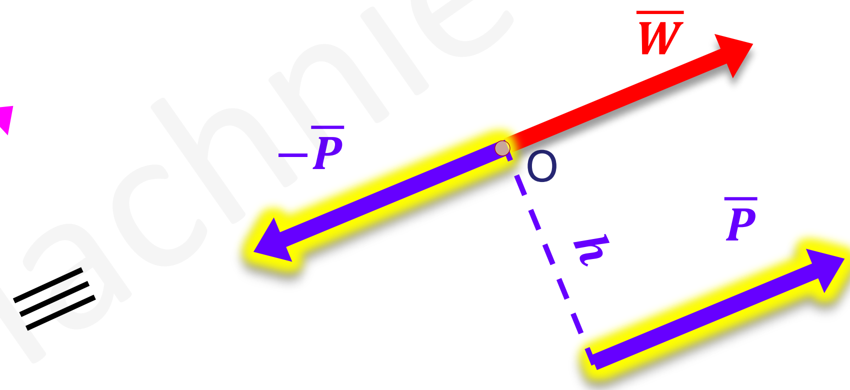


2.6. Płaski dowolny układ sił

W wyniku redukcji płaski dowolny układ sił zastąpiono:

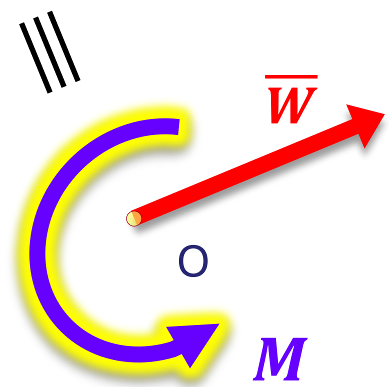
1) **wektorem głównym $\overline{W}$**, będącym sumą wszystkich sił działających na ciało oraz
2) **parą sił o momencie M**, równym algebraicznej sumie momentów par sił składowych



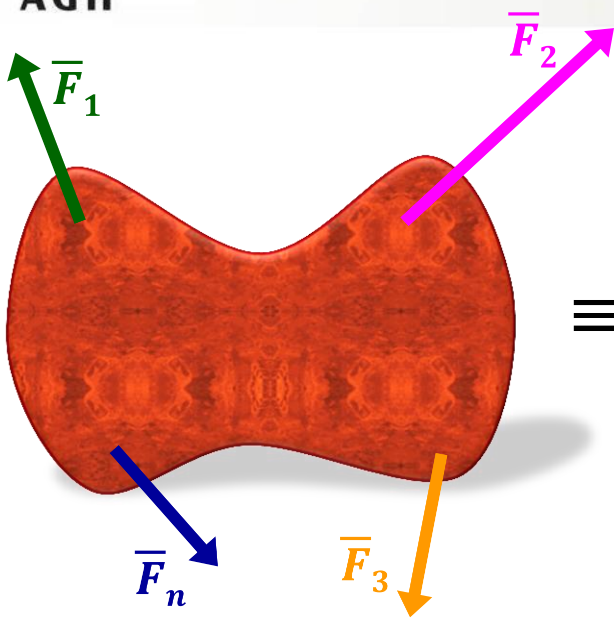


$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

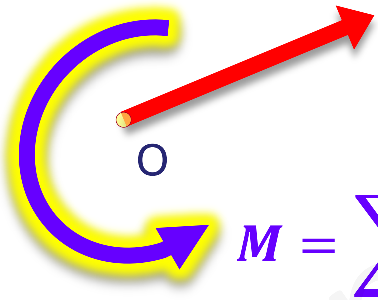
$$M = Ph = \sum_{i=1}^{n} F_i h_i$$



2.6. Płaski dowolny układ sił



$\equiv$



$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} F_i h_i = \sum_{i=1}^{n} M_{iO}$$

Warunki równowagi:

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0$$

$$\overline{W} = (W_x, W_y)$$

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} W_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ W_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ M = \sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0 \end{cases}$$

Warunki równowagi płaskiego dowolnego układu sił